



TITLE:

電気流体力学的不安定性における 乱流: 乱流転移と欠陥乱流(流体力学 におけるトポロジーの問題)

AUTHOR(S):

甲斐, 昌一

CITATION:

甲斐, 昌一. 電気流体力学的不安定性における乱流: 乱流転移と欠陥乱流(流体力学におけるトポロジーの問題). 数理解析研究所講究録 1991, 769: 28-38

ISSUE DATE:

1991-11

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82352>

RIGHT:

電気流体力学的不安定性における乱流—乱流転移と欠陥乱流

九州工業大学 甲斐昌一 (Shoichi Kai)

1. はじめに

液晶の薄膜（約0.1mm）に外部から電界を印加すると、対流が生じる。これを電気流体力学的不安定性（以後EHDと略記する）と呼ぶ。この現象に関する基礎方程式群は既に確立されていて、多くの液晶の教科書に掲載されている[1]。ここでは、古来よりよく研究されている等方性流体におけるレーリー・ベナール対流との対応を中心に述べる。

水や油を入れた容器を下から熱すると対流が生じる。これがレーリー・ベナール対流で過去100年以上研究が続けられてきて、流体力学的不安定性では最も理解の進んだ分野である。この現象では、普遍的なパタメーターとして、コントロール外力の強さを表わすレーリー数 $R (= g \beta \Delta T d^3 / \kappa \nu)$ 、生じた揺らぎが粘性による緩和かあるいは熱伝導による緩和かを示すプラントル数 $Pr (= \nu / \kappa)$ があり、これらによって不安定性は特徴づけられる。EHDにおいてもこれに類似した普遍パタメーターがあり、

各々電気レーリー数 R_e （電圧の自乗に比例）、電気プラントル数 P_e （周波数の逆数に比例）と呼ばれる（表1参照[2]）。特に P_e は不安定性の主役が弾性（誘電）緩和モードか電荷緩和モードかを表わし、

	レーリー・ベナール不安定	電気流体力学的不安定
力	浮力	静電気力
阻害因子	粘性	弾性
分岐パラメータ	温度差（レーリー数）	電圧（ V^2 ）
プラントル数	$\tau_\kappa / \tau_\nu = \nu / \kappa$	$\tau_\kappa / \tau_q \propto (f / f_c)^{-1}$

$$\tau_\kappa = d^2 / \kappa, \tau_\nu = d^2 / \nu, \tau_k = \gamma_1 d^2 / K \propto f^{-1} \quad d = \text{有効膜厚}$$

$$\tau_q = \epsilon // 4 \pi \sigma // = f c^{-1}, \nu : \text{動粘性係数}, \kappa : \text{熱拡散率}$$

$$d : \text{膜厚}, \gamma : \text{粘性係数}, K : \text{弾性定数} (K_{11} = K_{22} = K_{33} = K)$$

$$f : \text{印加電界周波数}, f_c : \text{臨界周波数} \quad \beta : \text{熱膨張率}$$

表1. レーリー・ベナール不安定性と電気流体力学的不安定性との間に見られるパラメータの相似性

それは印加電界の周波数によって区別される[2]。レーリー・ベナール対流では温度差 ΔT を増加するとともに次第に複雑な構造へと転移し、最終的には乱流へと遷移していく。EHD も同様に電圧 V (規格化電圧: $\varepsilon = (V^2 - V_c^2) / V_c^2$) を増加させると次第に複雑な流体構造へと遷移し、最後の乱流 1 - 乱流 2 転移を除けば、レーリー・ベナール対流との極めてよい対応が観測される。ここでは最初の不安定点近傍に現れる欠陥乱流と最後の乱れた構造として発生する乱流 1 - 乱流 2 転移とに話題を絞る。

2. 欠陥乱流の発生と特徴

(1) 発生問題

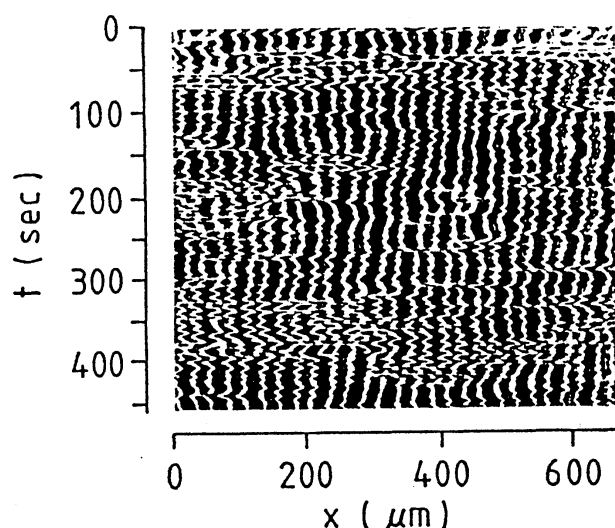


図1. 欠陥乱流の時空パターン

欠陥乱流は欠陥の発生とその時空間での乱雑さで定義される(図1)。しかしこの欠陥乱流の発生機構はまだ定かでない。欠陥乱流の発生までに、各種の非線形不安定性、エクハス、ジグザグ、オブリク、波状、クロスロールなどが現れるがこの詳細もまだ完全には理解されていない。EHDでこれらの諸不安定性を詳細に調べると、図2のようにまとめられる[2]。これらの不

安定性は欠陥乱流の発生機構に深く関連していて、詳細な研究が必要である。図3の一連の写真はエクハス不安定の様子を示したものである。最近EHDのエクハス不安定性は異方性流体(等方性では $w = 0$, $k_2 = 2$) に対する振幅方程式

$$\partial_t A = \varepsilon A + [\partial_x^2 - i k_2 \partial_x \partial_y^2 + w \partial_y^2 - \partial_y^4] A - |A|^2 A \quad (1)$$

を使って理論的にも深く研究されていて、そのコンピュータシュミレーションと非常によい一致がみられる(図4)[3]。この方程式にドリフト流の効果を取り入れた方程式の数値計算結果は図5のように実験的に得られた相図(図2)と極めてよい一致を示す[4]。この相図で重要なことは欠陥乱流の発生にジグザグ不安定性が深く関連していることである。すなわちジグザグ不安定性は欠陥のグライド運動を可能

にし、従って局所的にこの不安定が発生すると欠陥の生成、移動を可能にする。E

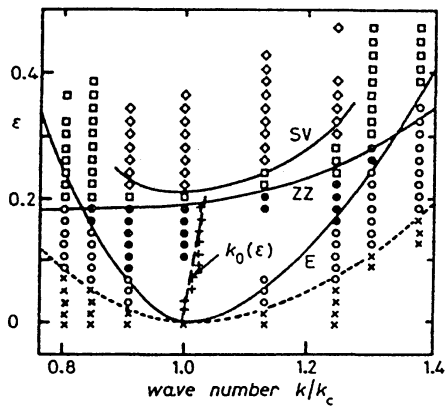


図2. EHDにおけるブッセダイアグラム(実験). 点線は中立安定曲線。E: エクハス不安定境界、ZZ: ジグザグ不安定境界、SV: スキューバリコース境界

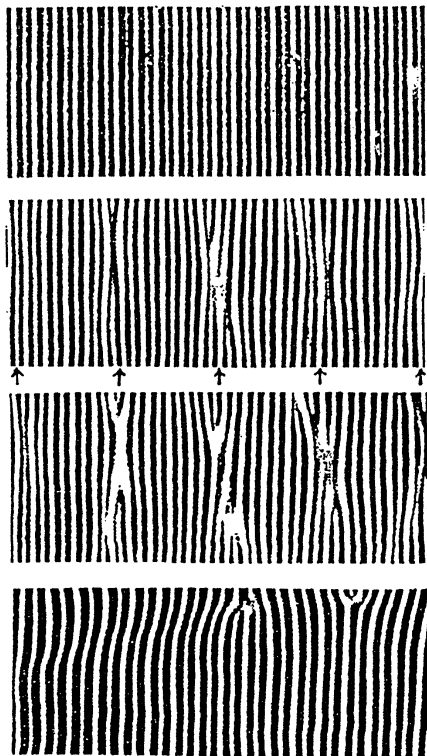
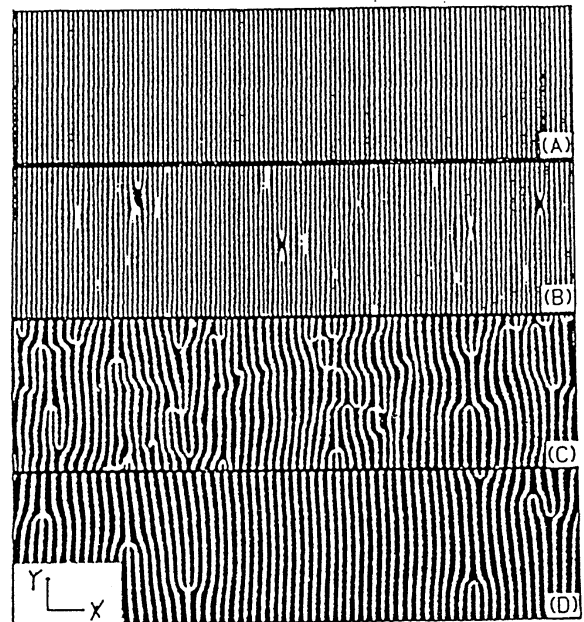


図3. EHDのエクハス不安定の時間発展。上から下へ経過(図4(理論)の時間経過参照)。

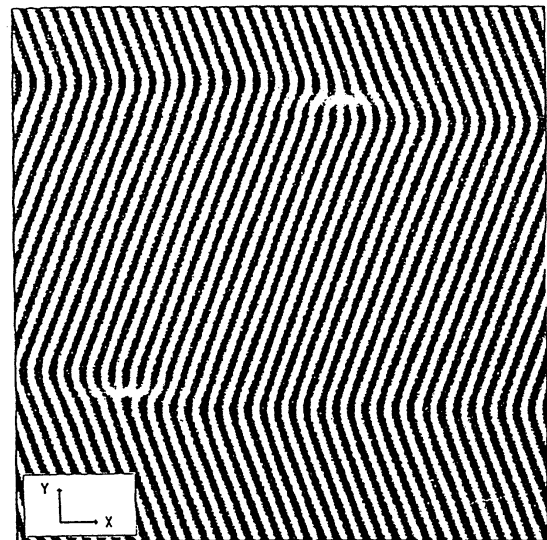


図4. 計算機シミュレーション。

上図: エクハス不安定によるパターン遷移(時間はA→Dと進行)。Bの様子は図3のそれを非常によく表わしている。下図: ジグザグパターン不安定性。実験との一致はよい。基本式として(1)式を使ってなされている。

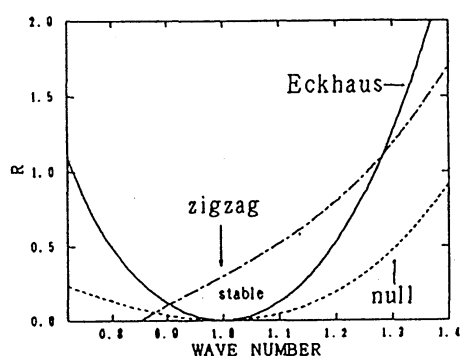


図5. EHDにおけるブッセダイアグラム（理論）

HDではドリフト流がなくてもオブリク・ジグザグ不安定性が起こり得るので、レーリー・ベナール対流で考えられているようにドリフト流が欠陥のグライドの原因とみなす必要がない。しかしその大局的な性質にこの局所不安定性を引き起こす機構が必要である。このように欠陥乱流にグライドは不可欠で、これが欠陥乱流の成因といえる。ところでアスペクト比の小さな系では長波長の不安定モード（ジグザグ・オブリク、エクハス）は抑制され、起こりにくくなる。そのかわりにパターン選択の主役は欠陥が行うこととなり、この場合には欠陥乱流の発生過程が異なる。

（2）性質と特徴

欠陥乱流の時空間変化は図1に示されているように、欠陥の運動が乱雑である。この欠陥乱流に対する実験事実はずぎのように得られている。（1）欠陥の数の時間変化は極めて乱雑で非周期的である（図6）。

（2）アスペクト比が大きい場合（例えば650）には間欠的な欠陥数の変化が見られ、

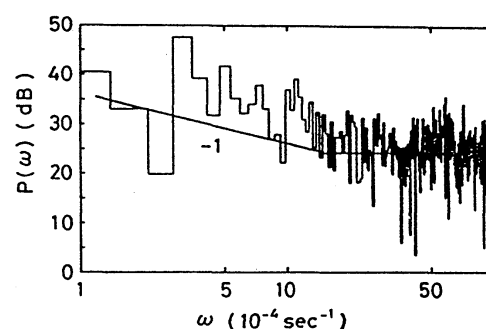
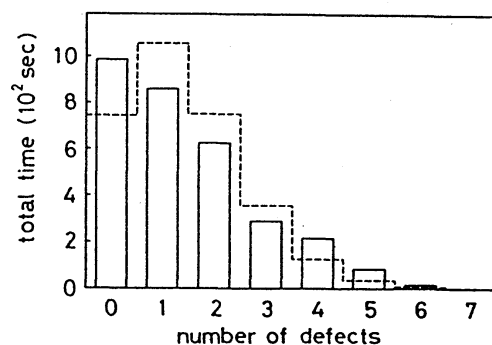
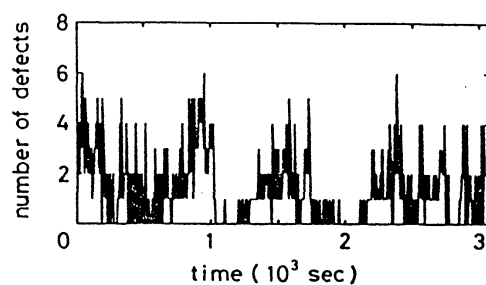


図6. 欠陥の数の時間変化（上図）、その分布（中図）、そのスペクトル（下図）（転移点近傍）。間欠性が観測される。

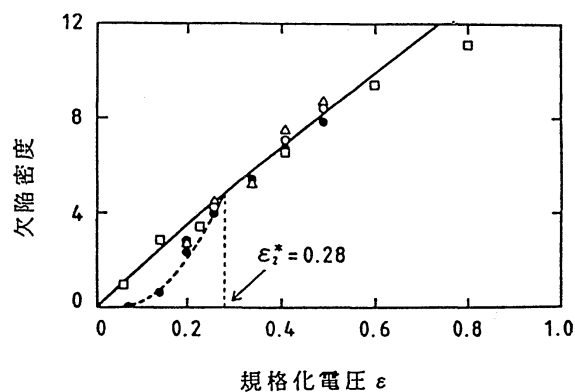


図7. 欠陥密度の分岐パラメータ ϵ 依存性。

そのスペクトルは $1/f$ 雑音型になっている。(3) アスペクト比が小さい場合には外力の増加に比例して欠陥密度は増加し、その非周期的時間変化のスペクトルは白色である。(4) アスペクト比の大きな系では $1/f$ 型スペクトルが欠陥乱流の発生点近傍で観測され、十分大きな外力では白色になる。(5) アスペクト比が大きいと発生点近傍と離れた領域とでは欠陥数の ε 依存性が大きく異なる(図7)。この依存性の変化はスペクトルの $1/f$ から白色型への変化と一致する ε で起こる。このことは欠陥数の ε 依存性とスペクトルの形は密接な関連を持つことを示す。

これらの結果から次のように推測される。上述したように欠陥の発生は局所不安定に起因する。欠陥乱流の発生点よりも下の領域では大局的な振幅方程式は空間の一部に局所不安定を起こさず、一様に系を、例えばジグザグパターンへと、遷移させていく。ところが欠陥乱流を記述する大局的方程式は空間の一部にエネルギーを集中させる傾向を持ち、そこに局所不安定を引き起こす。この局所不安定を引き起こす場所は次々と替わり、また局所不安定場の広さもカスケード的に次々と変化する。アスペクト比が小さいと、この広さは実空間の広さで制限され、常にほぼ同じ広さとなり、結果として欠陥の発生確率はポアソンので、時間変化は白色スペクトルとなる。一方大きな系では本来のカスケード的性質(間欠性)が反映され、長距離の不安定も発生しうる。これは $1/f$ スペクトルを生む。 ε が大きくなって(例えば相図のジグザグ不安定境界に囲まれた線形安定領域が全くなくなるような ε では)、欠陥密度が高くなると不安定場の広さは十分狭くなり、長距離の相関とそれにとまなう間欠性はなくなる。このため $1/f$ から白色スペクトルへと遷移していく。以上のような考えが実験結果から推測される。

3. 乱流1—乱流2 転移

乱流1—乱流2転移は気体ヘリウムのソフト・ハード転移、超流動量子乱流などで観測されている。EHDでの乱流2はディスクリネーションを発生させる点で量子乱流のフィラメントの発生と類似性を持つ。量子乱流に関する研究は長く、比較的よく理解されている。しかし両者のトポロジカル構造は異なっており、厳密な意味のアナロジーは現在のところ使えない。ここではまず研究の進んでいる量子乱流のT1—T2転移について簡単に述べる。

(1) 超流動T1—T2 転移

ヘリウムを4.17Kまで冷却すると液体ヘリウムとなる。これは常流動で、さらに2.17Kまで冷やすと超流動状態が発生する。いまこの超流動ヘリウムの入った容器

の一端を熱すると、熱流を輸送するように常流動が逆端に向かって流れる。同時にこれと反対方向に超流動成分が流れる。両端の温度差が大きくなると、この相互対流の速度は増加し、ある値で渦を形成する。これを量子乱流 (T1) と呼ぶ。この状態では渦の分布は不均一である。さらに熱流を増すと鋭い転移を示して、新しい乱流状態 T2 へ転移する。この状態は渦が均一に分布していると考えられ、T1 を不均一乱流、T2 を均一乱流と呼んでいる。しかし実際にはそのような構造が肉眼で見えるわけではなく、間接的な観測と推測によるものである。T1 - T2 転移における観測された事実をまとめると次のようになる [5]。

- (1) 渦密度に大きなジャンプ、
- (2) 緩和時間の発散傾向 (発散はしない)、
- (3) 第二音波吸収値の揺らぎの異常増大、
- (4) ヒステリシスがない、
- (5) 異常電流密度変化の観測、

などが観測されている。これらの事実にたいして不完全熊手分岐、

$$\partial_t A = \varepsilon A - A^3 + \Sigma_2 A^2 + \Sigma_0 \quad (2)$$

による説明を試みられ、比較的よい一致が得られている [5]。ここで $\Sigma_2 = \Sigma_0 = 0$ のときに完全熊手分岐となり、co-dimension-2 である。また $\Sigma_2 \neq 0$ 、 $\Sigma_0 = 0$ のときにはトランスクリティカル分岐 (TB)、 $\Sigma_2 \neq 0$ 、 $\Sigma_0 \neq 0$ のときにはヒステリッ

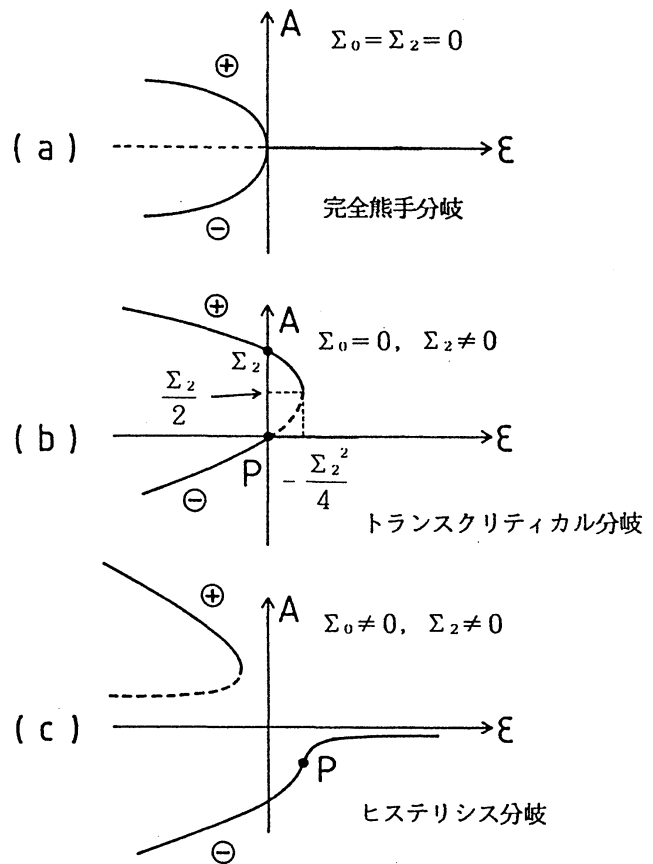


図8. (2) 式の方岐ダイヤグラム。

P: バラクリティカルポイント。

ク分岐となり、いずれも緩和時間の真の発散は見られないが極大点（パラクリティカル点）が観測される（図8）。

（2）EHDにおけるT1-T2転移

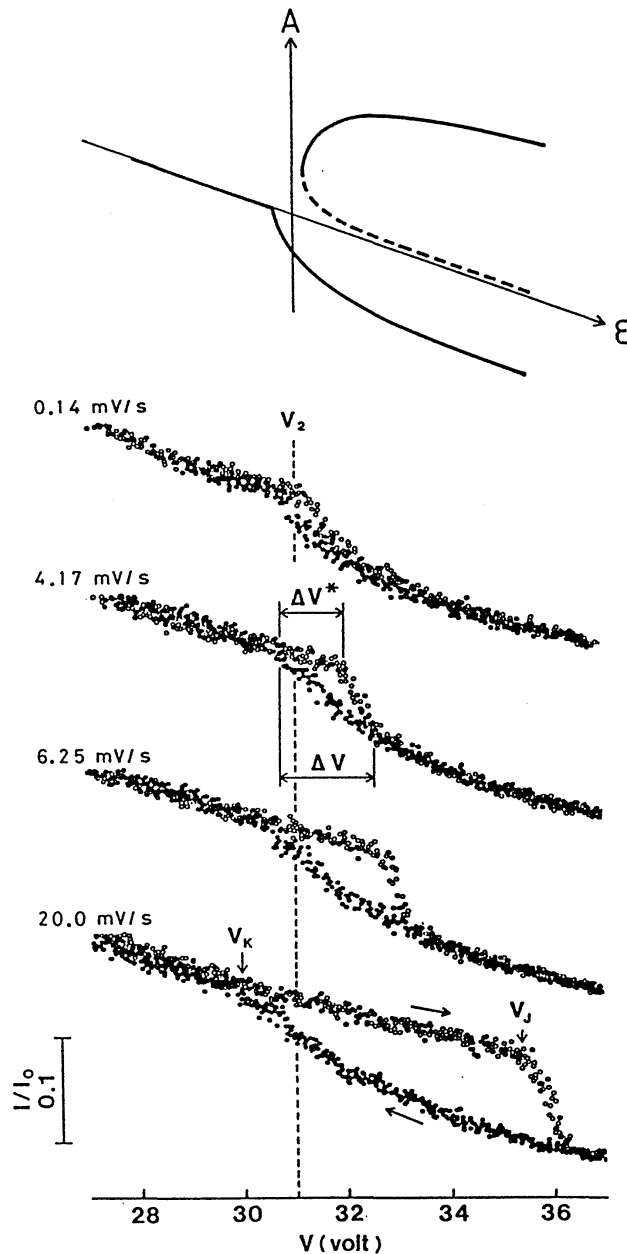


図9. EHDにおけるT1-T2転移近傍の光透過率 I/I_0 （回位密度に逆比例する）。左の各数値は電圧昇圧比 r である。上部に不完全熊手分岐を模式的に書きこんでいる。

図9はEHDでのT1-T2転移近傍の光透過率の電圧依存性を示す。光透過率はここではT2に生じたディスクリネーションの密度に逆比例する。一見ヒステリシスがあるように見えるが、電圧の変化率（ランプ比）を小さくするとヒステリシス幅は狭くなり、最終的にはなくなる[6]。すなわち分岐はスーパークリティカルである。この変化の様子は不完全分岐の形と非常に似かよっている。また印加電界の周波数が高くなると早くヒステリシスは消える。

このような転移の近傍でどのような様子にしてT2に遷移しているか観測すると、図10に示すようにT1（明るい領域）の中にT2（暗い領域）の核（楕円形）が発生し、それが成長して全面がT2へと変化する。これはいわゆる核生成型の転移で、その核生成率 J は古典論によく一致し、また成長融合過程は $t^{2.5}$ のKolmogorov-Avramiの式によく合う[7]。いずれも核の成長が古典的であることを示唆している。しかしこの楕円形の核の界面成長速度は古典論で予測される $\varepsilon^{0.5}$ にはならず、 $\varepsilon^{0.7}$ でありそのダイナミックスを記述する

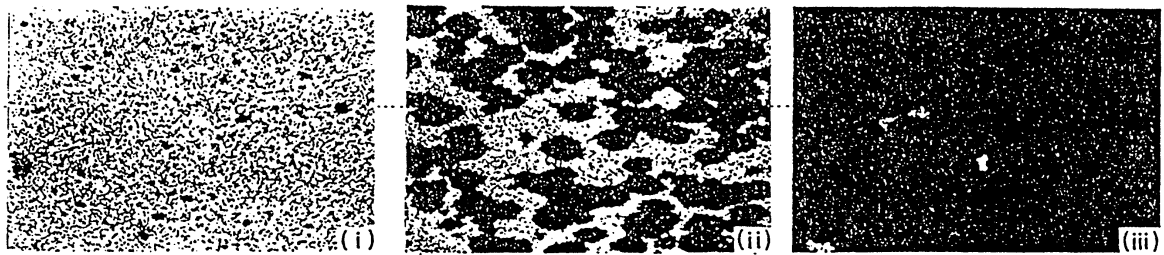


図10. 乱流Ⅰ－乱流Ⅱ（ディスクリネーション乱流）転移の様子

時間は（i）→（iii）へと進行。黒い楕円状の核が乱流Ⅱ（T2）の部分である。

モデル方程式はまだ不明である[6,7]。

T2核の中の様子をみると図11に示すように多くのループ（回位線：ディスクリネーション線）が見られ、これがT2の特徴であり、この点で超流動乱流T2の量子渦糸に似通っている。この場合に超流動場が弾性配向場に、常流動場が通常の流れ場に相当しているが、ループの詳細なトポロジカル構造は異なっている。この関係をもっとよく理解するために、以下簡単に液晶のディレクターの静止配向場における回位について述べる。

流れのない配向弾性歪場のみを考えると、回位線のエネルギーは液晶のディレクター \mathbf{n} の配向変化に伴うフランクの弾性エネルギー（ $F = 1/2 \int K(|\nabla \theta|^2 dr)$ から決まる（図12）。そのオイラー・ラグランジュの式は $\Delta \theta = 0$ で与えられ、解は

$$\theta = m\phi + \Phi \quad (3)$$

となる。 \mathbf{n} の配向歪場は m 、 Φ の値によって図13に示すように種々の構造をとる[8]。しかし m の次数の大きい

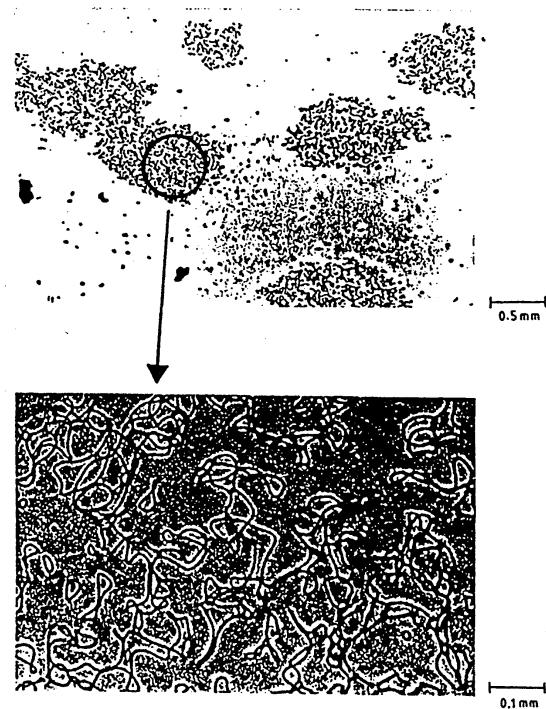


図11. T2の領域に見られる回位の様子。

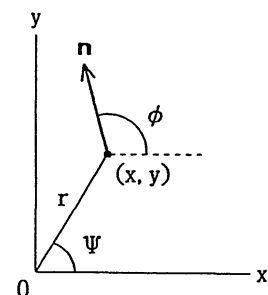


図12. ディレクター \mathbf{n} と θ の座標関係。

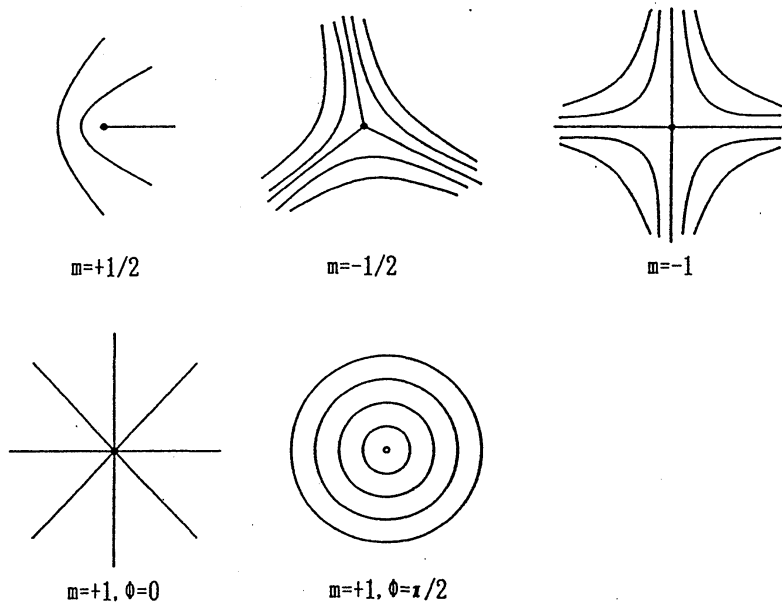
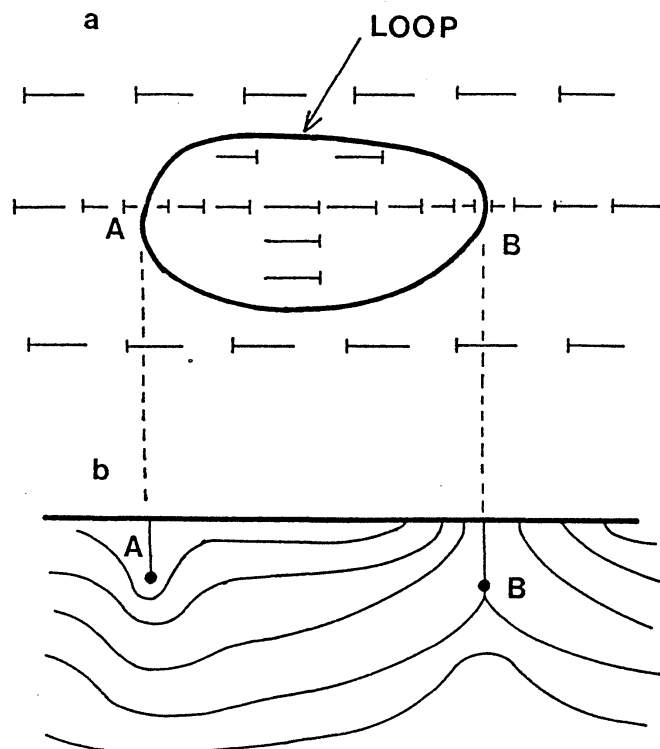


図13. ウェッジ型回位線のまわりの配向ベクトル場
(\mathbf{n} は曲線の切線方向に向く)

ものはエネルギー的に不安定
であり実現されない。通常
観測されるものは $|m| = 1/2$
、1 の2種で $m = 1$ は特異点
として安定であるが線として
は不安定である。これに対し
て $m = 1/2$ は線として安定で
図11のループはこの $|m| =$
 $1/2$ と思われる。実際に $m =$
 $1/2$ のループのパターンは非
常に図11と似通っている。そ
うだとすると図11に見られる
ループの内外のディレクター
の配向は図14に示すようにな
っていると考えられる。この

図14. 回位ループの近傍の
ディレクター \mathbf{n} の配向。
(a) 釘型の印は釘の頭の部分
が紙面に垂直の方向に傾いて
いることを示す。ループのと
ころは丁度配向角の特異点と
なっている。釘の向きをみる
と分かるようにループの内部
の \mathbf{n} の向きは外側とは逆にな
っている。(b) A-Bの断面
を示す。線はディレクター
の配向方向を示し、接線方向
に \mathbf{n} は向いている。



	ネマチック液晶の回位	結晶中のらせん転位	超流動の渦系
解	変位角 $\phi = m \tan^{-1} (y/x)$	変位 $u = (b/2\pi) \tan^{-1} (y/x)$	流れのポテンシャル $\phi_v = S_v \tan^{-1} (y/x)$
単位円筒あたりのエネルギー	$m^2 \ln (R/r_c)$	$(4\pi^2/\mu b^2) \ln (R/r_c)$	$S_v^2 \ln (R/r_c)$
応力	せん断応力なし	せん断応力のみ	せん断応力なし
圧力	$P = P_0 - Km^2/2r^2$	$P = 0$	$P = P_0 - \rho S_v^2/2r^2$
相互作用	同符号のペアは反発 異符号のペアは引力 $f \propto m_1 m_2 / r_{12}$	同符号のペアは反発 異符号のペアは引力 $f \propto b_1 b_2 / r_{12}$	同符号のペアは回転 異符号のペアは並進 —————
反応	$m = m_1 + m_2$	$b = b_1 + b_2$	なし

b : バーガーズ・ベクトル, S_v : 渦の強度, m : 回位の強度

μ : 剛性率, ρ : 密度, P_0 : 無限遠における圧力

表 2. 回位 (ディスクリネーション)、らせん転位と
超流動渦系との間のアナロジー

ようなループは強いシア流によって作られる。参考に静止配向場中の回位の特性と結晶場や量子渦との類似性を表 2 にまとめた。

5. おわりに

流体は本来等方性であり、流体力学的構造を除いて、流れによって新しいトポロジカル構造ができることはない。しかし液晶は流体でありながら、配向の秩序をもつ。このため強い流れによるディレクターの特異配向は全く新しいトポロジカル秩序状態を生み出すが、このような流れと配向秩序の相互作用はいまだに真剣な研究対象として扱われていない。一方弱いトポロジカル乱流である欠陥乱流は最近やっと理論的な取り掛かりができ、その発生機構や特徴が解明されつつある。いずれにしても現在のところ両者とも実験的研究が一步先に進んでいる。今後の理論的發展を願う。

参考文献

- [1] P.G. de Gennes, *Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1982)
- [2] S. Nasuno and S. Kai, *Europhys. Lett.* 14(1991)779; S. Kai et al, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 198(1991)247; S. Kai and K. Hirakawa, *Prog. Theor. Phys. supp.* 68 (1978) 212.
- [3] E. Bodenschatz, L. Kramer, W. Zimmermann, *J. Phys. (Paris)* 49(1988)1875.
- [4] S. Sasa, *Prog. Theor. Phys.* 83 (1990)824.
- [5] J. T. Tough, *Superfluid Turbulence in Low Temperature Physics*, ed. D. F. Brewer 8 (North-Holland, 1982); W. Horsthemke and M. F. Scumaker, *J. Stat. Phys.* 54(1989)1175.
- [6] S. Kai, W. Zimmermann, M. Andoh and N. Chizumi, *Phys. Rev. Lett.* 64(1990)1111.
- [7] S. Kai and W. Zimmermann, *Prog. Theor. Phys. supp.* 99(1989)458.
- [8] S. Chandrasekhar, *Ad. Phys.*, 35(1986)507.